Şirul lui Fibonacci

Ioan TOFAN[1]

Acest şir este legat de următoarea problemă celebră:

Câte perechi de iepuri se nasc într-un an dintr-o singură pereche de iepuri? care apare în manuscrisul "*Liber abacci*" (sec. al **XIII**-lea) al matematicianului *Leonardo din Pisa* (poreclit *Fibonacci*).

Există o vastă literatură de specialitate în care sunt tratate variate aspecte privind şirul lui Fibonacci.

Scopul acestei Note este de a prezenta două din aceste aspecte, pe care le considerăm interesante şi deosebit de frumoase.

1. Preliminarii. Şirul lui Fibonacci, $(F_n)_{n\geq 1}$ se defineşte recurent astfel:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{pentru } n \geq 3. \tag{1}$$

Ecuaţia $x^2 - x - 1 = 0$ se numeşte *ecuaţia caracteristică* asociată acestui şir. Rădăcinile ei sunt numerele $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Propoziţia 1.1. *Pentru orice $n \geq 1$ are loc formula:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (\textit{formula lui Binet}). \tag{2}$$

Demonstraţie. Ţinând seama de (**1**) şi relaţiile $\alpha+\beta = 1$ şi $\alpha\beta = -1$, avem:

$$F_n = (\alpha+\beta)F_{n-1} - \alpha\beta F_{n-2},\ n\geq 3 \Rightarrow F_n - \alpha F_{n-1} = \beta(F_{n-1} - \alpha F_{n-2}),\ n \geq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-2}(F_2 - \alpha F_1),\ n\geq 3 \Rightarrow F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-2}(1-\alpha),\ n \geq 2.$$

Scriind ultima egalitate pentru valorile n, $n-1$, ..., 2 şi înmulţind relaţiile obţinute cu 1, α, α^2, ..., α^{n-2}, respectiv, şi apoi adunându-le, vom obţine:

$$F_n = \alpha^{n-1} + (1-\alpha)(\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-3}\beta + \alpha^{n-2}),\ n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$F_n = \alpha^{n-1} + (1-\alpha)\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta},\ n\geq 2 \Leftrightarrow F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n),\ n \geq 2.$$

Cum $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, am obţinut formula (**2**).

Propoziţia 1.2. *Şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ are proprietăţile următoare:*

(**i**) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$, $n \geq 3$, $m \geq 1$;

(**ii**) $F_n \mid F_m$ *dacă* $n \mid m$, $\quad n, m \in \mathbf{N}^*$.

Aceste afirmaţii se demonstrează prin inducţie completă. Pentru detalii se poate consulta [**5**].

Propoziţia 1.3. *Doi termeni vecini ai şirului $(F_n)_{n\geq 1}$ sunt numere prime între ele.*

[1] Conf. dr., Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Demonstraţie. Fie $d = (F_n, F_{n+1})$, $n \geq 3$. De aici rezultă că $d \mid F_{n+1} - F_n$ şi, datorită relaţiei (**1**), vom avea $d \mid F_{n-1}$. În mod asemănător, $d \mid F_n$ şi $d \mid F_{n-1} \Rightarrow d \mid F_{n-2}$. Procedând astfel, vom obţine $d \mid F_1$, adică $d = 1$.

Următorul rezultat este remarcabil:

Propoziţia 1.4. *Pentru orice* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *avem* $(F_m, F_n) = F_{(n,m)}$.

Demonstraţie. Putem presupune $m > n$ fără a restrânge generalitatea. Ştim că (m, n) este ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1 && ,0 < r_1 < n, \\ n &= r_1 q_2 + r_2 && ,0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 && ,0 < r_3 < r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k && ,0 < r_k < r_{k-1}, \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1}. \end{aligned}$$

Aşadar, $(m, n) = r_k$. Atunci, în conformitate cu (**i**),

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_1 + r_1}, F_n) = (F_{nq_1 - 1} F_{r_1} + F_{nq_1} F_{r_1 + 1}, F_n) = (F_{nq_1 - 1} F_{r_1}, F_n),$$

căci $F_n \mid F_{nq_1}$ (conform cu (**ii**)). Dar $(F_{nq_1 - 1}, F_n) = 1$, căci, din (**ii**), $d \mid F_n$ şi $d \mid F_{nq_1 - 1} \Rightarrow d \mid F_{nq_1}$ şi $d \mid F_{nq_1 - 1}$, iar Propoziţia **3** ne conduce la $d = 1$. Ca urmare,

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_1 - 1} F_{r_1}, F_n) \Rightarrow (F_m, F_n) = (F_{r_1}, F_n).$$

Procedând la fel cu a doua egalitate din algoritmul lui Euclid, vom obţine: $(F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2})$. În cele din urmă ajungem la $(F_m, F_n) = (F_{r_{k-1}}, F_{r_k})$, adică $(F_m, F_n) = F_{r_k} = F_{(m,n)}$, q.e.d.

Observaţie. Două dintre aspectele întâlnite mai sus vor sta în atenţia noastră în cele ce urmează: **1**) proprietatea $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, $m, n \in \mathbf{N}^*$; **2**) prezenţa numărului $\Phi = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, numit *numărul de aur* (sau *secţiunea de aur*) în formula lui Binet.

2. $(F_n)_{n \geq 1}$ **şi şirurile Mersenne şi Dedekind.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere naturale.

Definiţie. *Se spune că* $(a_n)_{n \geq 1}$ *este un* **şir Mersenne** *dacă satisface condiţia* $(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$, *pentru orice* $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Şirul $(M_n)_{n \geq 1}$ cu $M_n = 2^n - 1$ se numeşte *şirul lui Mersenne* (M. Mersenne, matematician francez, sec **XVII**). Numerele prime din acest şir se numesc *numerele lui Mersenne.* Nu se ştie dacă există o infinitate de numere Mersenne, aşa cum nu se ştie încă dacă există o infinitate de numere prime în şirul $(F_n)_{n \geq 1}$ al lui Fibonacci.

Şirul $(M_n)_{n \geq 1}$ satisface condiţia $(M_m, M_n) = M_{(m,n)}$, adică este un şir Mersenne în sensul definiţiei de mai sus [**4**, p. 54]. Şirul de polinoame $(X^n - 1)_{n \geq 1}$ este de asemenea şir Mersenne, căci are loc $(X^m - 1, X^n - 1) = X^{(m,n)} - 1$. În secţiunea **1** a fost dovedit faptul că şirul lui Fibonacci este un şir Mersenne.

Definiţie. *Se spune că* $(a_n)_{n \geq 1}$ *este un* **şir Dedekind** *dacă din* $m \nmid n$ *şi* $n \nmid m$ *urmează că* $(a_m, a_n) = 1$.

Propoziţia 2.1. *Pentru orice şir Mersenne* $(a_n)_{n\geq 1}$ *avem* $m \mid n \Rightarrow a_m \mid a_n$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $m \mid n \Rightarrow (m,n) = m \Rightarrow a_{(m,n)} = a_m \Rightarrow (a_m, a_n) = a_{(m,n)} = a_m \Rightarrow a_m \mid a_n$.

Propoziţia 2.2. *Pentru orice şir Mersenne* $(a_n)_{n\geq 1}$ *pentru care* $a_k \neq a_l$, $\forall k \neq l$, *avem că* $a_m \mid a_n \Rightarrow m \mid n$.

Demonstraţie. Avem: $a_m \mid a_n \Rightarrow (a_m, a_n) = a_m \Rightarrow a_{(m,n)} = a_m \Rightarrow (m,n) = = m \Rightarrow m \mid n$.

Pentru demonstraţiile următoarelor două propoziţii trimitem la [4, tema 4].

Propoziţia 2.3. *Un şir* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este şir Mersenne dacă şi numai dacă există un unic şir Dedekind* $(b_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $a_n = \prod\limits_{d|n} b_d$ *(relaţia este numită* **relaţia Dedekind**).

Propoziţia 2.4. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este un şir Mersenne, atunci şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *dat de* $b_n = \prod\limits_{d|n} a_d^{\mu(\frac{n}{d})}$ *este un şir Dedekind, anume unicul şir Dedekind precizat de propoziţia precedentă (*μ *notează* **funcţia lui Möbius**, $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$, *definită astfel* $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ *dacă* $n = p_1 p_2 ... p_k$ *cu* $p_1, \ldots, p_k$ *prime şi distincte,* $\mu(n) = 0$, *dacă există numărul prim* p *astfel încât* $p^2 \mid n$).

Observaţie. Şirul Dedekind asociat şirului lui Fibonacci este dat de $b_n = \prod\limits_{d|n} F_d^{\mu(\frac{n}{d})}$.

3. $(F_n)_{n\geq 1}$ **şi secţiunea de aur.** Numărul $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a apărut mai sus ca soluţie a ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$. La rândul ei, această ecuaţie apare, de exemplu, în problema determinării unui punct pe un segment dat care să împartă acest segment în două segmente astfel încât cel mai mare dintre ele să fie medie proporţională între segmentul întreg şi segmentul mai mic. O astfel de împărţire a unui segment se numeşte şi *împărţire în medie şi extremă raţie* sau *secţiunea de aur* a segmentului şi este întâlnită destul de des în geometrie.

Numărul Φ este cunoscut încă din antichitate:

- în cazul piramidei lui Keops, raportul dintre apotema unei feţe laterale şi apotema bazei este Φ;
- Φ a fost studiat de Şcoala lui Pitagora;
- Platon aminteşte în "Dialoguri" de acest număr;
- problema 11 din Cartea a II-a a Elementelor lui Euclid (reluată şi în Cartea a VI-a) conduce la numărul de aur;
- Φ apare în cadrul construcţiilor poligoanelor regulate cu $5k$ laturi ($k \in \mathbb{N}^*$);
- Leonardo da Vinci a redescoperit acest număr studiind proporţiile dintre diferitele părţi ale corpului uman.

Utilizând formula lui Binet se obţine imediat că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Pentru numărul Φ sunt cunoscute următoarele reprezentări:

(i) $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$,

(ii) $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$,

(iii) $\Phi = -1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} + \ldots$,

(iv) $\Phi = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{(-1)^n}{F_n^2}\right) \ldots$.

Se constată imediat că şirul

$$1 \ , \ \Phi \ , \ \Phi^2 \ , \ \ldots \ , \ \Phi^n \ , \ \ldots$$

verifică relaţia de recurenţă $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, $n \geq 2$. Notând $u_n = \Phi^n$, această relaţie se scrie $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$, adică relaţia de recurenţă ce stă la baza şirului lui Fibonacci. Mai mult, orice şir $(u_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ are forma generală $u_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. Dacă pentru primii doi termeni avem $u_1 = u_2 = 1$, atunci obţinem $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, adică ajungem la şirul lui Fibonacci. De remarcat că şirurile obţinute prin particularizarea constantelor c_1 şi c_2 în forma generală de mai sus reflectă numeric însuşirea materici vii de a se dezvolta. Proprietatea a fost verificată de botanişti, atunci când au măsurat distanţele dintre nodurile de unde cresc frunzele, cât şi de zoologi, prin observarea cochiliilor melcilor, scoicilor etc.

În arhitectură, în sec. **I** î.H. Vitruviu atrăgea atenţia asupra acordului ce trebuie stabilit între diferitele părţi ale unei clădiri şi clădirea întreagă, respectiv ale întregii clădiri faţă de locul în care este situată. Şi în acest context se ţine seama de numărul Φ.

Construcţiile moderne trebuie să ţină seama de noile condiţii apărute şi se poate alege o altă scară de proporţii pe care arhitectul să se sprijine în lucrările sale.

Le Corbusier a utilizat diversele lungimi ce se asociază unui om stând în picioare şi având un braţ ridicat: distanţa de la vârful degetelor la cap (41,5 cm), distanţa de la mijloc la cap (66,5 cm) etc. Cu aceste dimensiuni a format un şir de care s-a folosit în construcţiile sale:

$$41,5 \ ; \ 66,5 \ ; \ 108 \ ; \ 174,5 \ ; \ \ldots \ .$$

Se constată, însă, că şi acest şir verifică relaţia de recurenţă îndeplinită de şirul lui Fibonacci.

Bibliografie

[1] **F. T. Câmpan**, *Probleme celebre*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1972.
[2] **F. T. Câmpan**, *Povestiri cu proporţii şi simetrii*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1985.
[3] **P. Minuţ**, *Teoria numerelor*, vol. **I**, *Capitole introductive*, Ed. C. Gâldău, Iaşi, 1997.
[4] **M. Ţena**, *Cinci teme de aritmetică superioară*, Bucureşti, 1991.
[5] **N. N. Vorobiev**, *Numerele lui Fibonacci*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1953.