Concursul de matematică “Florica T. Câmpan”
Etapa judeţeană, 18 februarie 2006

Clasa a IV-a

1. Să se împartă la trei persoane 24 sticle de suc identice ca mărime, din care 5 sunt pline, 11 umplute pe jumătate şi 8 goale, încât fiecare să aibă acelaşi număr de sticle, dar şi aceeaşi cantitate de suc.

Înv. Lina Huzum

2. Între cele 9 numere de mai jos există un "intrus". Acesta nu respectă relaţia dintre cifre ce există la fiecare din celelalte opt numere. Descoperă şi scrie relaţia, precum şi numărul "intrus": 9334, 4862, 6148, 5132, 7835, 3524, 9963, 9782, 8133.

Înv. Fănică Dragnea

3. Cântarul pe care vor să se cântărească trei copii nu măsoară mase mai mici de 40 kg. Fiecare din cei trei copii cântăresc între 25 şi 30 kg.

Cum a reuşit fiecare copil să se cântărească?

Inst. Iulian Cristea

Clasa a V-a

1. Cifrele care alcătuiesc vârsta bunicului reprezintă vârstele celor doi nepoţi. Dacă împărţim vârsta bunicului la suma vârstelor nepoţilor, se obţine câtul 4 şi restul 12. Aflaţi vârsta bunicului şi vârstele nepoţilor.

Mihaela Cianga

2. Se consideră înmulţirea următoare, unde literele nu reprezintă obligatoriu cifre distincte:

$$\begin{array}{r} \overline{a3b} \\ \overline{cd} \\ \hline \overline{ef3g} \\ \overline{hik} \\ \hline \overline{2np3} \end{array}$$

a) Determinaţi e.

b) Arătaţi că $bd = 63$.

c) Reconstituiţi înmulţirea.

Gabriel Popa

3. Se consideră mulţimea $A = \{2, 3, 4, \ldots, 13\}$.

a) Determinaţi B, C disjuncte astfel încât $B \cup C = A$ şi suma elementelor din B este egală cu sumă elementelor din C.

b) Arătaţi că nu există M, N disjuncte cu $M \cup N = A$ şi produsul elementelor din M egal cu produsul elementelor din N.

c) Găsiţi două mulţimi X, Y disjuncte cu $X \cup Y = A$, X având două elemente, cu produsul elementelor lui X egal cu suma elementelor lui Y.

Ionel Nechifor

Clasa a VI-a

1. Pe o tablă s-au scris trei numere naturale. Când în locul lor s-au scris: suma, produsul şi suma produselor câte două, s-a văzut că pe tablă au apărut aceleaşi numere ca şi cele iniţiale. Care este produsul lor? Explicaţi!

2. Pe o tablă este scris numărul 12. La fiecare minut numărul se înmulţeşte sau se împarte fără rest fie la 2, fie la 3, iar rezultatul se scrie pe tablă în locul numărului iniţial. Să se arate că numărul scris pe tablă după exact o oră nu poate fi 54.

3. Unghiurile proprii $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ sunt adiacente suplementare. Fie $[Ox$ şi $[Oy$ bisectoarele acestora. Dacă $m(\widehat{BOy}) \in \mathbb{N}^*$ şi $m(\widehat{COx}) = p \cdot m(\widehat{BOy})$, unde p este număr prim, aflaţi numărul p.

Vasile Nechita

Clasa a VII-a

1. Fie a un număr natural arbitrar, divizibil prin 9, având 2007 cifre. Notăm cu $s(a)$ numărul care reprezintă suma cifrelor lui a. Găsiţi $s(s(s(a)))$.

Gabriel Mîrşanu

2. Vârfurile unui cub se notează cu 8 numere întregi consecutive, iar centrul fiecărei feţe se notează cu media aritmetică a vârfurilor feţei respective.

a) Să se demonstreze că suma centrelor oricăror două feţe opuse este aceeaşi şi să se afle cât este aceasta în funcţie de cel mai mic dintre numerele din vârfuri.

b) Să se găsească în ce condiţii centrul unei feţe este număr întreg. Să se scrie vârfurile feţelor ale căror centre sunt numere întregi.

c) Arătaţi că, dacă centrele a trei feţe care au un vârf comun sunt notate cu numere întregi, atunci şi centrele celorlaltor feţe sunt notate tot cu numere întregi.

Julieta Grigoraş

3. În ţara **TI** a triunghiurilor isoscele era împărat, firesc, triunghiul echilateral. El decretase că este singurul care binemerită numele de *Prearostogolibil*; supuşii săi trebuiau să fie numiţi *ţepoşi* dacă au o latură mai scurtă decât cele egale, respectiv *turtiţi* dacă au o latură mai lungă decât cele egale. (Vorba congruent era socotită de ocară pe acele meleaguri.) Nişte unghiuri umblau venetice prin **TI** căutând fiecare triunghi isoscel la al cărui vârf să slujească.

– Ţeposule, zise un unghi α. Eu şi vecinii mei de pribegie bâlbâitul de β şi nemăsuratul de γ ne căutăm stăpâni în **TI**. Ne-ai fi de mare folos dacă ai binevoi să ne spui dacă nu cumva ai o bisectoare interioară a ta exact atât de lungă ca o latură.

– După vorbire se cunoaşte că veniţi de pe coclauri unde lucrurile nu sunt făcute din linii drepte bine limitate. Întrebi de lucruri la care nu gândeşte nimeni fiindcă nu sunt de niciun folos. Dar, până cercetez pentru răspuns, fii bun măi crăcănatule şi spune-mi dacă aşa se obişnuieşte pe la voi: să-ţi ponegreşti colegii cu vorbe necuviincioase?

– Nu e necuviinţă, prea-limitatule. Eu, α, mă exprim frumos în grade, de aceea sunt purtător de cuvânt; β nu cunoaşte fracţii ordinare ci doar zecimale şi se bâlbâie grozav când încearcă să spună câte grade are; γ încă nu ştie dacă este măsurabil în grade. Dar bag seamă că întârzii cu răspunsul la întrebarea mea; o fi capul tău mai mult ascuţit decât încăpător?

– Bine, măi vorbăreţule. Am cercetat şi răspund precis: am exact două bisectoare interioare exact aşa de lungi ca laturile mele egale.

– Am înţeles. Te rog să mă ierţi că ţi-am zis ţepos; înţeleg că eşti turtit. Mie personal nu îmi eşti de folos, dar iată că pentru β eşti bun de stăpân. Dacă bisectoarele tale egale erau cât latura ta scurtă, te recunoşteam de stăpân. Dacă o singură bisectoare a ta era cât latura ta scurtă, te-ar fi slujit γ cu credinţă.

a) Exprimaţi cu fracţii ordinare gradele lui α şi β.

b) Exprimaţi cu fracţii zecimale numărul de grade, minute şi secunde ale lui β.

c) Argumentaţi că triunghiurile isoscele care convin lui α, respectiv β, sunt *ţepoase*, respectiv *turtite*.

d) Desenaţi un triunghi isoscel cu unghiurile de la vârf γ. Este el *ţepos* sau *turtit*?

Dan Brânzei

Clasa a VIII-a

1. Într-o clasă sunt 20 de elevi. Fiecare fată oferă fiecărui băiat trei flori şi fiecarei fete o floare, iar fiecare băiat oferă câte trei flori fiecărei fete şi câte o floare fiecărui băiat.

a) Arătaţi că numărul maxim de flori oferite este 780.

b) Câte fete ar trebui să fie în clasă, astfel încât să fie oferite exact 780 de flori?

Monica Nedelcu, Iaşi

2. Pe fiecare faţă a unui cub este scris câte un număr natural nenul, iar fiecărui vârf îi corespunde produsul numerelor de pe cele trei feţe adiacente acestuia. Dacă suma numerelor corespunzătoare tuturor vârfurilor este 2006, arătaţi că există cel puţin două feţe pe care este scris acelaşi număr.

3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$ şi punctele $E \in (BN)$, $F \in (DQ)$ astfel încât suma $AE + AF + PE + PF$ este minimă. Arătaţi că $EF \perp AP$ dacă şi numai dacă $ABCDMNPQ$ este prismă regulată.

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

Faza interjudeţeană, 20 mai 2005

Clasa a IV-a

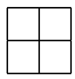
1. Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană pleacă dintr-un vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge o distanţă de 637 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m. Aflaţi la ce distanţă se va situa în final persoana, faţă de punctul de plecare.

RecMat - 1/2005, P.90

2. Avem mai multe vase identice. Ştim că 50 vase pline cu apă cântăresc 600 kg, iar 10 vase goale cântăresc cu un kilogram mai puţin decât apa dintr-un vas plin. Să se afle cât cântăresc 100 de vase goale.

Petru Asaftei

3. În câte moduri diferite pot fi scrise numerele 1, 2, 3, 4 în pătratele din figura alăturată, câte unul în fiecare pătrat, astfel încât să nu existe două pătrate alăturate în care suma să fie 5? Justificaţi. (Pătratele care au doar un vârf comun nu sunt considerate alăturate, iar pătratul mare este fix.)



Petru Asaftei

Clasa a V-a

1. Din produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 2006 se exclud toate numerele care se divid cu 5. În ce cifră se termină produsul celorlaltor numere?

2. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,3,4,6,8,9,11,12,16. Doi copii au şters câte patru numere şi s-a observat că suma numerelor şterse de unul este de trei ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?

3. Fie numărul 123456789. O operaţie înseamnă să alegem două cifre alăturate cărora să li se scadă o unitate şi să li se schimbe locurile (de exemplu: 123456789 $\to$ 123436789 $\to$ ...). Care este cel mai mic număr ce se poate obţine ca rezultat al acestor operaţii? După câte operaţii se obţine cel mai mic număr?

Clasa a VI-a

1. Se pot aşeza pe muchiile unui cub numerele $1, 2, 3, \ldots, 12$ (câte un număr pe fiecare muchie) astfel încât suma numerelor aflate pe cele trei muchii care pleacă din acelaşi vârf să fie aceeaşi pentru fiecare vârf al cubului?

Constantin Chirilă

2. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\widehat{BAC}) = 20°$. Fie $M, P \in (AC)$ astfel încât şi $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{CBP}) = 20°$ şi $N \in (AB)$ astfel încât $m(\widehat{BCN}) = 50°$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

3. Numerele naturale $22, 23, 24$ au următoarea proprietate: descompunerile în factori primi ale numerelor din şir au exponenţii factorilor numere impare ($22 = 2^1 \cdot 11^1$, $23 = 23^1$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Care este cel mai mare număr de numere naturale consecutive care au această proprietate?

Cristian - Cătălin Budeanu

Clasa a VII-a

1. *a*) Arătaţi că din oricare 3 numere naturale, putem alege două astfel încât suma lor să fie un număr par.

b) Fiind date şapte numere naturale, arătaţi că putem alege patru dintre ele astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 4.

Cristian Lazăr

2. Fie ΔABC isoscel cu $BC = 2a$, $AB = AC = b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Să se determine toate triunghiurile ABC, dacă $a = 2r$, unde r este raza cercului înscris în ΔABC, şi apoi găsiţi ΔABC cu aria minimă.

Dan Brânzei

3. Un trapez $ABCD$ are baza mare $[AB]$ şi $[AC] \cap [BD] = \{O\}$. Linia mijlocie a trapezului intersectează pe AC în E şi pe BD în F.

a) Demonstraţi că $ABCD$ este trapez isoscel dacă şi numai dacă $[OE] \equiv [OF]$.

b) Vârfurile trapezului şi punctul O reprezintă 5 oraşe, iar laturile şi diagonalele sale sunt şosele de legătură. Două maşini pleacă din D, respectiv C pe ruta cea mai scurtă spre A, respectiv spre B şi alte două maşini pleacă din A respectiv B spre D, respectiv C, trecând prin O pe ruta cea mai scurtă. Cele 4 maşini au aceeaşi viteză, constantă, pe întreg parcursul. Demonstraţi că primele 2 maşini ajung simultan în D, respectiv C. Pot ajunge, toate patru, în acelaşi timp la destinaţie?

Claudiu-Ştefan Popa

Clasa a VIII-a

1. Aflaţi perechile de numere întregi cu proprietatea că diferenţa cuburilor lor este egală cu pătratul diferenţei lor.

2. Un poliedru are 17 muchii şi 9 feţe.

a) Desenaţi două astfel de poliedre diferite.

b) Dacă feţele poliedrului sunt doar triunghiuri echilaterale sau pătrate, iar toate muchiile sunt de lungime 1 cm, calculaţi aria sa totală.

Gabriel Popa

3. Un cub cu latura de n cm ($n \in \mathbb{N}^*$) se împarte în cuburi cu latura de 1 cm şi se colorează toate cuburile situate pe diagonalele feţelor cubului iniţial. Aflaţi n astfel ca numărul cuburilor colorate să fie 2006.

Julieta Grigoraş