Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a III-a

I. Aflati cea mai mica suma de forma

$$\square\square\square \quad + \quad \square\square\square$$

în care s-au folosit doar cifrele 0, 1, 2, 4, 5, 6 o singura data. Aratati variantele posibile.

II. **a)** Puneti paranteze astfel încât sa obtineti un numar cât mai mic: $100-30+50-2+10$.

b) Reconstituiti adunarea:

$$\overline{ABC}+\overline{BC}+C=\overline{4A5}$$

III. Se da suma:

3 + 5 + 7 + 13 + 15 + 17 + 22 + 24 + 26 + 34 + 36 +38

a) Calculati suma grupând convenabil termenii.

b) Daca înlocuim un semn „+” cu un semn „–” se obtine rezultatul 210. În fata carui numar din suma s-a pus semnul „–” ?

IV. La un concurs „Cine stie câstiga”, cei 2 finalisti, raspund corect la cele 3 întrebari; ei au ales întrebari ce valoreaza 1 punct, 5 puncte sau 10 puncte. Primul a realizat un scor de trei ori mai mare decât al doilea. Care este diferenta de punctaj dintre ei ?

Punctaj: I. 9p; **II.** a) 4p; b) 5p; **III.** a) 4p; b) 5p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: $1^{h}\ 30^{min}$.

Concursul de matematica Arhimede
Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a IV-a

I. Efectuati calculele:

a) $A = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9$

$B = (2 + 2 \cdot 2) + 2 : 2$

b) $3 + 5 + 7 + \ldots + 2007 - 2 - 4 - 6 - \ldots - 2006$.

II. Scrie un numar de 3 cifre care adunat cu rasturnatul sau, sa dea 1009. Care este cel mai mare numar cu aceasta proprietate? Câte astfel de numere exista?

III. Aflându-se la bunici, Ionel vrea sa numere pasarile din curte. El observa ca le poate grupa astfel încât la 5 gaini sa corespunda 2 rate, iar la 3 rate sa corespunda o gâsca. Stiind ca în curte erau 92 de pasari, aflati câte pasari de fiecare fel sunt în curte.

IV. Calculati:

$(\overline{xyzt} + \overline{mnuv}) : 5$

stiind ca:

$\overline{xn} + \overline{my} = 81$ si

$\overline{zv} + \overline{ut} = 125$

Punctaj: I. a) 4p; b) 5p; **II.** 9p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: $1^{h}\, 30^{min}$.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a V-a

I. Calculati:

a) $2+2\cdot[22+2\cdot(222-37\cdot 6)]$

b) $135\cdot 75-135\cdot 65+65\cdot 124-114\cdot 65$

c) $7218:18-9867:23:13$

Revista Arhimede

II. **1)** Un numar este cu 2006 mai mare decât altul. Daca împartim suma lor la diferenta lor, obtinem câtul si restul egale cu 2. Sa se afle numerele.

Cristina Godeanu

2) Reconstituiti adunarea:

$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2604$

Iolanda Ionescu, Iulian Gogoasa

III. Sa se determine numarul x daca suma cifrelor sale este y, suma cifrelor numarului y este z si $x+y+z=60$.

Revista Arhimede

IV. Sa se afle câte numere naturale A de trei cifre au proprietatea ca putem gasi un numar natural B astfel încât numarul $A-B$ sa aiba doua cifre iar numarul $A+B$ sa aiba patru cifre.

Preda Traian

Punctaj: I. a) 3p; b) 3p; c) 3p; **II.** 1) 5p; 2) 4p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.

Concursul de matematica Arhimede
Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VI-a

I. **1.** Se dau numerele:

$$a = (10^2 + 9^2 + 8^2) : 7^2 + (5^2 - 3^2) : 2^2 \text{ si } b = 2000 : 10 + (3^4 + 3^3) : 3^2 + 3^2 + 2^2$$

Sa se afle cel mai mare divizor comun si cel mai mic multiplu comun al numerelor a si b.

2. Sa se arate ca numarul: $2^{n+3} \cdot 3^n + 6^{n+2} - 2^n \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 41 pentru orice $n \in N$.

Revista Arhimede

II. **1)** Sa se determine cel mai mic si cel mai mare numar de forma $\overline{abab}$ (scris în baza 10), cu numar minim de divizori.

Dan Nedeianu

2) Determinati $n \in N$ pentru care:

a) $\frac{3}{5} < \frac{n}{12} < \frac{11}{15}$

b) $\frac{14}{29} < \frac{6}{n} < \frac{7}{12}$

3) Suma dintre cel mai mic multiplu comun si cel mai mare divizor comun a doua numere naturale este 101. Sa se afle numerele.

Sorin Radulescu

III. Fie punctele coliniare $A_1, A_2, ..., A_{20}$, în aceasta ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1mm$, $A_2A_3 = 2mm$, $A_3A_4 = 3mm$ si asa mai departe.

a) Ce lungime are segmentul $A_{19}A_{20}$?

b) Determinati lungimea segmentului A_1A_{20} în cm.

c) Daca M este mijlocul segmentului A_1A_{20} si N mijlocul segmentului A_2A_{19}, calculati lungimea segmentului MN.

IV. Se considera unghiurile AOB si BOC astfel încât $m(\angle AOB) = \overline{ab}$ grade, $m(\angle BOC) = \overline{bc}$ grade si $m(\angle MON) = \overline{ac}$ grade unde a, b, c sunt cifre distincte iar $[OM$ si $[ON$ sunt bisectoarele $\angle AOB$ respectiv $\angle BOC$.

1. Sa se determine a, b, c.

2. Sa se afle $m(\angle AOC)$.

Preda Traian

Punctaj: I. 1) 5p; 2) 4p; **II.** 1) 3p; 2.a) 2p; 2.b) 2p; 3) 2p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** 1) 4p; 2) 5p.
Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.

Concursul de matematica Arhimede
Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VII-a

I. **a)** Se considera numerele:

$A=(1-30)(2-30)..........(a-30)$

$B=(-1)^1(-1)^2...(-1)^a$ si $C=(-1)^1+(-1)^2+...+(-1)^a$ cu $a\in N^*$.

i) Pentru $a=15$ ordonati crescator numerele A, B, C.

ii) Pentru $a=2007$ ordonati descrescator numerele A, B, C.

Cristian Olteanu

b) Fie $\overline{0,a_1a_2...a_n...}$ scrierea zecimala a numarului $\frac{1}{6}+\frac{1}{13}$. Determinati a_{2006} si $a_1+a_2+...+a_{2006}$.

Damian Marinescu

II. **a)** Sa se gaseasca $n\in Z$ astfel încât $n+2\,|\,n^2+3$.

Liviu Oprisescu

b) Sa se demonstreze ca singurele numere rationale care verifica egalitatea:

$a+a^3+a^5=a^2+a^4+a^6$ sunt 0 si 1.

Sorin Radulescu, Adrian Turcu

III. Fie $ABCD$ un patrulater convex si E un punct pe (BC) astfel încât $[AB]\equiv[BE]$, $[EC]\equiv[DC]$ si mas $\angle AED=90^\circ$.

a) Aratati ca AB si CD sunt paralele.

b) Daca M este mijlocul segmentului AD, atunci mas $\angle BMC=90^\circ$.

Diana Niculescu

IV. În triunghiul isoscel $ABC(AB\equiv AC)$ notam cu C' piciorul înaltimii din $C(C'\in AB)$ si cu M mijlocul laturii AB. Sa se determine masurile unghiurilor ΔABC stiind ca $BC=2\cdot C'M$.

Titu Zvonaru

Punctaj: **I.** a)i) 2p; a)ii) 3p; b) 4p; **II.** a) 5p; b) 4p; **III.** a) 5p; b) 4p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a VIII-a

I. **a)** Aflati toate numerele naturale $\overline{xy}$ pentru care $\sqrt{\frac{\overline{xy}+12}{\overline{xy}-12}} \in N$

Gh. Cristescu

b) Determinati numerele reale x, y, z care verifica egalitatea:

$(x+y-2)^2 + \sqrt{z-x-y} + |2x-y+3| = 0$

II. **a)** Fie a, b numere reale nenule astfel încât numerele ab, $\frac{a}{b}$ si a^3+b^3 sa fie toate rationale. Demonstrati ca a si b sunt, de asemenea, numere rationale.

b) Fie $a, b \in Z$ si numerele

$X = 7a^3 + 3b^2 + 2a$, $\qquad Y = 5b^3 + 3a^2 - 2b$

Demonstrati ca: $X \vdots 6$ numai daca $Y \vdots 6$.

Dan Nedeianu

III. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se considera O, centrul bazei $ABCD$ si M, centrul fetei $BCC'B'$.

a) Demonstrati ca $OM \parallel (AB'D')$.

b) Determinati masura unghiului format de dreptele OM si AD'.

c) Aratati ca planele (DMB) si $(AB'D')$ sunt paralele.

Godeanu Cristina

IV. Fie $VABC$ o piramida triunghiulara si punctele $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (VC)$. Notam:

$AB' \cap A'B = \{M\}$; $\quad BC' \cap B'C = \{N\}$; $\quad CA' \cap AC' = \{P\}$ si $VM \cap AB = \{M'\}$, $VN \cap BC = \{N'\}$, $VP \cap AC = \{P'\}$.

Sa se demonstreze echivalenta urmatoarelor afirmatii:

a) $(MNP) \parallel (A'B'C')$

b) M', N', P' sunt mijloacele laturilor AB, BC respectiv AC.

Preda Traian

Punctaj: I. a) 4p; b) 5p; **II.** a) 5p; b) 4p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** a) 5p; b) 4p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a IX-a

I. Sa se arate ca:

1) Orice numar rational se scrie ca diferenta a doua patrate de numere rationale.

2) Pentru orice numar întreg a exista x,y,z numere întregi cu proprietatea

$3a^2 + 3a = x^3 + y^3 + z^3$

Marius Dragan

II. Fie x,y,z numere reale nenule astfel încât $x + y + z \geq 3$ si $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Sa se demonstreze ca:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

b) $\frac{1}{3 - x^2} + \frac{1}{3 - y^2} + \frac{1}{3 - z^2} \geq \frac{3}{2}$

Stefan Smarandache

III. Fie x un numar real. Sa se arate ca:

1) Daca exista $n \in \mathrm{N}^*$ cu proprietatea ca $x^{n^2} \in Q$ si $x^{(n+1)^2} \in Q$ atunci $x \in Q$.

2) Exista $x \in R \setminus Q$ cu proprietatea ca $x^{n^2+n} \in Q$ $(\forall)$ $n \in N^*$.

3) Daca $a, b, c \in N^*$ $(a+b, c) = 1$ si $x^{an^2+bn+c} \in Q$ $(\forall)$ $n \in N^*$ atunci $x \in Q$.

Sorin Radulescu, Adrian Troe

IV. Sa se determine valoarea maxima a parametrului $a > 0$ pentru care are loc inegalitatea:

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq a\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

pentru orice $a, b, c > 0$.

I.V. Maftei

Punctaj: I. 1) 4p; 2) 5p; **II.** a) 4p; b) 5p; **III.** a) 3p; b) 3p; c) 3p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a X-a

I. **a)** Fie M o multime de numere reale cu cel putin doua elemente si $f : M \to M$ o functie care îndeplineste conditia:

$f(f(x)) = f(x) - x,\ (\forall)\ x \in M$

Sa se demonstreze ca f nu poate fi monotona.

Gh. Stoica

b) Sa se determine multimea

$A = \left\{ x \in R \mid arcctg(ctgx) = p \cdot \left\{ \frac{1}{p} \cdot x \right\} \right\}$ unde am notat cu $\{y\}$ partea fractionara a numarului real y.

Costel Chites, Adrian Stoica

II. Pentru $a, b \in R^*$, sa se determine functia $f : R \to R$ pentru care

$f\left(x - \frac{b}{a}\right) + 2x \le \frac{a}{b} x^2 + 2\frac{b}{a} \le f\left(x + \frac{b}{a}\right) - 2x,\ (\forall)\ x \in R$.

Dorin Marghidanu

III. Se considera functiile $f, g : R_+ \to R$ definite prin $f(x) = x^3 + x$ si $g(x) = x^4 + x$.

1) Sa se demonstreze ca functiile f si g sunt strict crescatoare.

2) Daca $a, b \in (0, \infty)$ si $f(a) = 3,\ g(b) = 4$ sa se calculeze semnul numarului real $c = b - a$.

Sorin Radulescu, Cristian Alexandrescu

IV. Fie ABC un triunghi si G centrul sau de greutate astfel încât:

$BC + AG = AC + BG = AB + CG$

Aratati ca triunghiul ABC este echilateral.

Marius Mâinea

Punctaj: **I.** a) 4p; b) 5p; **II.** a) 9p; **III.** 1) 4p; 2) 5p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a XI-a

I. Sa se determine $X \in M_2(R)$ pentru care

$$X^7 = \begin{pmatrix} 56 & 64 \\ 63 & 72 \end{pmatrix}$$

Aurel Dobosan

II. **1)** Sa se demonstreze ca:

$$x^3 - x^2 + \frac{4}{27} \geq 0 \quad (\forall) x \in [0,1].$$

2) Se considera $A = \left\{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \mid x \in [0,1]\right\}$. Sa se calculeze $\inf A$ si $\sup A$.

Petrus Alexandrescu, Iuliana Turcu

III. Fie $A \in M_2(C)$ cu proprietatea $trA^n = trA^{n+1} = O$.

Sa se demonstreze ca $A^2 = O_2$.

Sorin Radulescu, Mihai Piticari

IV. Se considera functia $f : R_+^* \to R \quad f(x) = x + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$.

Sa se determine $a \in R_+^*$ cu proprietatea $f(x) \geq f(a), \ (\forall) x \in R_+^*$.

Sorin Radulescu, Mihail Bencze

Punctaj: I. 9p; **II.** 1) 4p; 2) 5p; **III.** 9p; **IV.** 9p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.

Concursul de matematica Arhimede

Editia a IV-a. Etapa I-a 25 noiembrie 2006.

Subiecte clasa a XII-a

I. Fie $a \in (1, \infty)$. Pe $G = (0, \infty)$ se introduce urmatoarea lege de compozitie:

$$x * y = 2\log_a\left[\left(\sqrt{a^x} - 1\right)\left(\sqrt{a^y} - 1\right) + 1\right], \quad x, y \in G.$$

Sa se demonstreze ca:

1) Legea „*" este lege de compozitie interna pe G.

2) $(G, *)$ este grup abelian.

Aurel Dobosan, Bot Trandafir

II. Sa se calculeze $\int \frac{x\sin 2x + \cos 2x}{x^3}dx$, $x \in (0, \infty)$.

I.V. Maftei, Marius Radulescu

III. Fie I, J intervale si $f : I \to R^*$ o functie cu primitiva $F : I \to J$ bijectiva.

a. Sa se calculeze: $\int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)}dx$, $x \in J$.

b. Sa se calculeze: $\int \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + 1}}dx$, $x \in R$.

Dan Popescu

IV. Fie $n \geq 2$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(Z_n)$

si $G = \{A^k \mid k \in N^*\}$. Aratati ca urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a. 3 este prim cu n

b. G cu înmultirea este grup

S. Radulescu, I.Savu

Punctaj: I. 1) 3p; 2) 6p; **II.** 9p; **III.** 1) 5p; 2) 4p; **IV.** 1) 4p; 2) 5p.

Nota: La fiecare problema se acorda 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore.